Einstufungstest Mathematik für den Vorkurs PH an der ISME

Erlaubte Hilfsmittel:	Formelsammlung für den Vorkurs PH, Taschenrechner ohne CAS, Geodreieck und Zirkel
Zeit für den Test:	120 min
Berechnung der Note:	"erreichte Punktzahl": 6 + 1

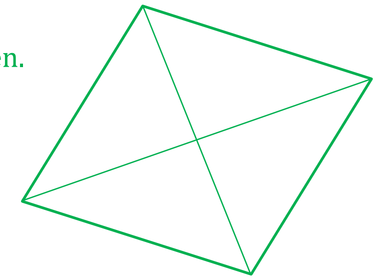
Detaillierte Angaben zu den Voraussetzungen finden Sie auf der Homepage der ISME unter Downloads.
Die AKAD-Hefte können auf https://www.compendio.ch bezogen werden.

Geometrie

Aufgabe 1 (Satzgruppe des Pythagoras; GM 106): *2 Punkte*

Ein Rhombus sei durch die beiden Diagonalen e und f gegeben. Bestimmen Sie daraus die Seite a.

Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander.
Die Katheten der vier Teildreiecke sind halb so gross, wie die Diagonalen.
Somit gilt:



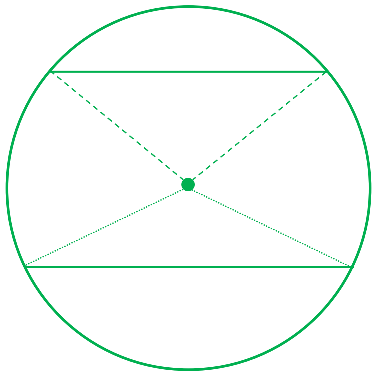
$$a = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4}} = \sqrt{\frac{e^2 + f^2}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{e^2 + f^2}$$

Aufgabe 2 (Satzgruppe des Pythagoras; GM 106): *2 Punkte*

Gegeben seien ein Kreis mit Radius $r = 7.5$ cm und in ihm zwei parallele Sehnen der Länge $a = 9.8$ cm und $b = 11.2$ cm. Berechnen Sie den Abstand der Sehnen.

Höhe des Teildreiecks mit den Seiten r und a:

$$h_a = \sqrt{(7.5 \text{ cm})^2 - \left(\frac{9.8}{2} \text{ cm}\right)^2} = 5.678 \text{ cm}$$



Höhe des Teildreiecks mit den Seiten r und b:

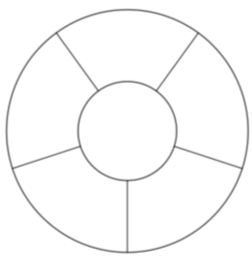
$$h_b = \sqrt{(7.5 \text{ cm})^2 - \left(\frac{11.2}{2} \text{ cm}\right)^2} = 4.989 \text{ cm}$$

Abstand s der Sehnen:
$s = h_a + h_b = 10.667$ cm

Aufgabe 3 (Regelmässige Vielecke; der Kreis; GM 107): *2 Punkte*

Jeder der fünf Kreisringteile habe denselben Flächeninhalt wie der innere Kreis. Berechnen Sie die Breite des Kreisringes aus dem Radius r des inneren Kreises.

Gesamter Flächeninhalt:
$A_{gesamt} = 6 \cdot A_{Kreis} = 6 \cdot r^2 \cdot \pi = R^2 \cdot \pi$



Grosser Radius des äusseren Kreises:
$R = \sqrt{6} \cdot r$

Breite des Kreisringes:
$R - r = \sqrt{6} \cdot r - r = \left(\sqrt{6} - 1\right) \cdot r$

Aufgabe 4 (Würfel, Quader, Prisma und Pyramide; GM 110): *2 Punkte*

Auf einem Würfel mit Kantenlänge 8 cm werde eine Pyramide mit derselben Kantenlänge aufgesetzt. Berechnen Sie die Länge x von einer Ecke der Grundfläche des Würfels zur Spitze der Pyramide.

Diagonale der Grund- und Deckfläche des Würfels:

$d = \sqrt{2} \cdot 8 \text{ cm} = 11.314 \text{ cm}$

Höhe der aufgesetzten Pyramide:

$$h_P = \sqrt{(8 \text{ cm})^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{64 \text{ cm}^2 - 32 \text{ cm}^2} = \sqrt{32 \text{ cm}^2} = 5.657 \text{ cm}$$

Höhe des ganzen Körpers:

$h_K = h_W + h_P = 8 \text{ cm} + 5.657 \text{ cm} = 13.657 \text{ cm}$

Länge x:

$$x = \sqrt{h_K^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{186.51 \text{ cm}^2 + 32 \text{ cm}^2} = 14.782 \text{ cm}$$

Aufgabe 5 (Würfel, Quader, Prisma und Pyramide; GM 110): *2 Punkte*

Eine gerade quadratische Pyramide habe das Volumen $V = 108 \text{ cm}^3$ und die Raumhöhe $h = 9$ cm. Berechnen Sie die Oberfläche dieser Pyramide.

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot s^2 \cdot h = 3 \text{ cm} \cdot \text{s}^2 = 108 \text{ cm}^3 \rightarrow s = 6 \text{ cm}$$

Oberfläche der Pyramide:

$$A_P = A_G + 4 \cdot A_\Delta = s^2 + 4 \cdot \frac{s \cdot h_\Delta}{2} = 36 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 6 \text{ cm} \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

$$A_P = 36 \text{ cm}^2 + 12 \text{ cm} \cdot \sqrt{81 \text{ cm}^2 + 9 \text{ cm}^2} = 36 \text{ cm}^2 + 12 \text{ cm} \cdot \sqrt{90 \text{ cm}^2} = 149.842 \text{ cm}^2$$

Algebra und Arithmetik

Aufgabe 6 (Lineare Gleichungen; AA 103): *2 Punkte*

Bestimmen Sie x.

a) $-\frac{x}{4} - \frac{3x-18}{6} = 17 - \left(\frac{3}{4}x - 8\right)$

$-x - (2x - 12) = 68 - (3x - 32) \rightarrow -x - 2x + 12 = 68 - 3x + 32$

$\rightarrow -3x + 12 = -3x + 100 \rightarrow 0 = 88 \rightarrow \mathbb{L} = \{\,\}$ (keine Lösung)

b) $\frac{3(x-6)}{4} + 15 + \frac{2(x-3)}{3} = 25 + \frac{x-1}{2} - \frac{x+13}{5}$

$15 \cdot 3(x-6) + 60 \cdot 15 + 20 \cdot 2(x-3) = 60 \cdot 25 + 30 \cdot (x-1) - 12 \cdot (x+13)$

$45x - 270 + 900 + 40x - 120 = 1500 + 30x - 30 - 12x - 156$

$85x + 510 = 18x + 1314 \rightarrow 67x = 804 \rightarrow x = 12 \rightarrow \mathbb{L} = \{12\}$

Aufgabe 7 (Lineare Gleichungen; AA 103): *2 Punkte*

Mutter und Tochter waren vor 2 Jahren zusammen 90 Jahre alt. Vor 12 Jahren war die Mutter um 2 Jahre jünger als das doppelte Alter der Tochter. Wie alt sind beide heute?

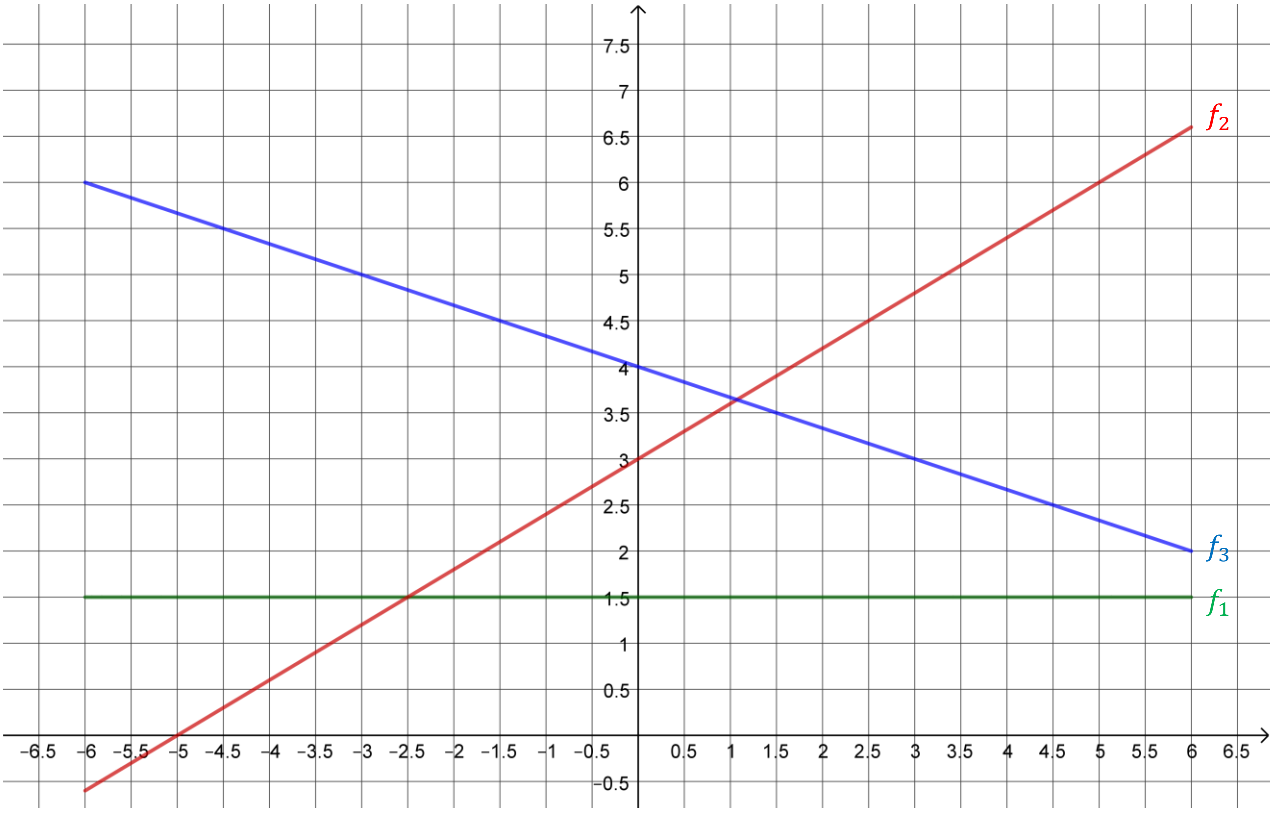
Alter der Mutter: x
Alter der Tochter: y

$(x-2)+(y-2)=90 \rightarrow y=94-x$
$(x-12+2)=2\cdot(y-12) \rightarrow x-10=2\cdot(94-x-12)=2\cdot(82-x)=164-2x$
$3x=174 \rightarrow x=58$ und $y=94-x=36$

Die Mutter ist 58 Jahre und die Tochter 36 Jahre alt.

Aufgabe 8 (Lineare Funktionen; AA 108): *2 Punkte*

Zeichnen Sie für $x\in[-6;6]$ die Graphen der Funktionen $y=f_1(x)=1.5$, $y=f_2(x)=0.6x+3$ und $y=f_3(x)=\frac{12-x}{3}$.



Aufgabe 9 (Lineare Funktionen; AA 108): *2 Punkte*

Die Geraden AB mit $A(0|0)$ und $B(2|4)$ und CD mit $C(-2|6)$ und $D(4|6)$ schneiden sich im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S.

Gerade AB: $y=f(x)=\frac{4-0}{2-0}\cdot x+b_1=y=2x+0=2x$

Gerade CD: $y=f(x)=\frac{6-6}{4-(-2)}\cdot x+b_2=\frac{0}{6}x+b_2=6$

Schnittpunkt S: $2x=6 \rightarrow x=3 \rightarrow y=6 \rightarrow S(3|6)$

Aufgabe 10 (Lineare Gleichungssysteme; AA 109): *2 Punkte*

Bestimmen Sie x und y.

a) $\begin{vmatrix} 8y-18x & = & -16x+7y+3 \\ -19y+17x+5 & = & 21x-20y+9 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} y & = & 2x+3 \\ y & = & 4x+4 \end{vmatrix} \rightarrow 2x+3=4x+4 \rightarrow -1=2x \rightarrow x=-\frac{1}{2} \rightarrow y=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=2$

$\mathbb{L}=\left\{\left(-\frac{1}{2}\middle|2\right)\right\}$

b) $\begin{vmatrix} 3y+5x & = & 20x+3 \\ 9y-5x & = & 5x+7y+4 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3y & = & 15x+3 \\ 2y & = & 10x+4 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} y & = & 5x+1 \\ y & = & 5x+2 \end{vmatrix} \rightarrow 5x+1=5x+2 \rightarrow 1=2 \rightarrow \mathbb{L}=\{\,\}$ (keine Lösung)

Aufgabe 11 (Die quadratische Gleichung; AA 112): *2 Punkte*

Berechnen Sie x mithilfe der Auflösungsformel.

a) $(x+5)^2-(2x-1)(3x+5)=(x+3)^2-(x+1)^2$

$x^2+10x+25-(6x^2+7x-5)=x^2+6x+9-(x^2+2x+1)$

$-5x^2+3x+30=4x+8 \rightarrow 5x^2+x-22=0$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot5\cdot(-22)}}{2\cdot5}=\frac{-1\pm\sqrt{441}}{10}=\frac{-1\pm21}{10}\rightarrow x_1=2, x_2=-2.2, \mathbb{L}=\{-2.2,2\}$$

b) $2\cdot(3x+1)^2-32\cdot(3x+1)+126=0$

Substitution: $(3x+1)=u \rightarrow 2u^2-32u+126=0 \rightarrow u^2-16u+63=0$

$$u_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4\cdot1\cdot63}}{2\cdot1}=\frac{16\pm\sqrt{256-252}}{2}=\frac{16\pm2}{2}\rightarrow u_1=9, u_2=7$$

Rücksubstitution: $3x_1+1=9 \rightarrow x_1=\frac{8}{3}$

$3x_2+1=7 \rightarrow x_2=2$ $\qquad \mathbb{L}=\{2, 2.67\}$

Aufgabe 12 (Die quadratische Gleichung; AA 112): *2 Punkte*

Berechnen Sie x ohne Anwendung der Auflösungsformel.

a) $\left(\frac{4.2-5x}{11.4}\right)^2=-122.8$

keine Lösung; das Quadrat einer Zahl kann nie negativ sein.

b) $0=-81\cdot\left(\frac{27\cdot(x-\sqrt{3})\cdot x^3}{35}\right)^2$

$0=(x-\sqrt{3})\cdot x^3 \rightarrow x_1=\sqrt{3}, x_2=0$ $\qquad \mathbb{L}=\{0,\sqrt{3}\}$

Aufgabe 13 (Die quadratische Funktion; AA 112): *2 Punkte*

Eine Parabelgleichung $y = ax^2 + bx + c$ soll so bestimmt werden, dass die Punkte $P(2|4)$, $Q(1|-1)$ und $R(4|8)$ auf der Parabel liegen. Ferner sind die Koordinaten des Scheitelpunktes gesucht.

P: $\quad 4 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c \quad (1)$
Q: $\; -1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c \quad (2)$
R: $\quad 8 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 16a + 4b + c \quad (3)$

(1) – (2) $\quad 5 = 3a + b \quad (4)$
(3) – (1) $\quad 4 = 12a + 2b \rightarrow 2 = 6a + b \quad (5)$

(5) – (4) $\quad -3 = 3a \rightarrow a = -1 \rightarrow 2 = 6 \cdot (-1) + b \rightarrow b = 8 \rightarrow -1 = -1 + 8 + c \rightarrow c = -8$

Funktionsgleichung: $\quad y = f(x) = -x^2 + 8x - 8$
Scheitelpunkt: $\quad S(4|8)$

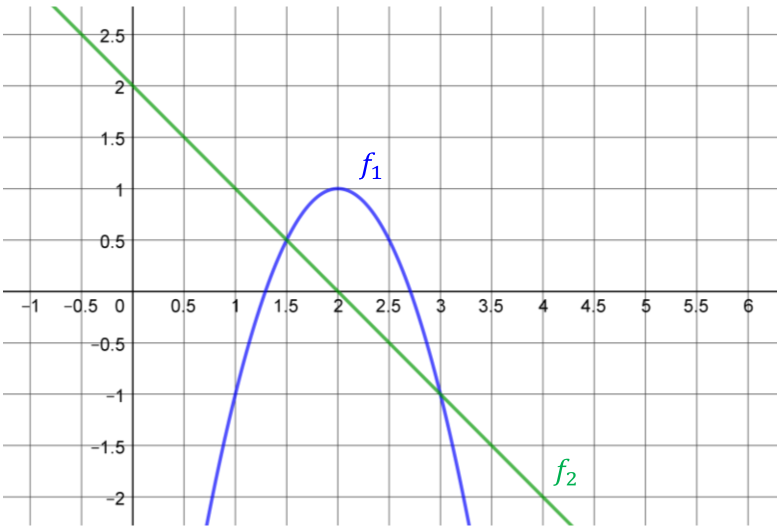
Aufgabe 14 (Die quadratische Funktion; AA 112): *2 Punkte*

Gegeben seien die Gleichung der Parabel $y = f_1(x) = -2x^2 + 8x - 7$ und die Gleichung der Geraden $y = f_2(x) = -x + 2$.

a) Bestimmen Sie die Scheitelkoordinaten der Parabel.

$$S\left(-\frac{b}{2a}\middle|c - \frac{b^2}{4a}\right) \rightarrow S\left(-\frac{8}{2 \cdot (-2)}\middle|-7 - \frac{8^2}{4 \cdot (-2)}\right) \rightarrow S(2|1)$$

b) Stellen Sie in einem Koordinatensystem die Graphen der Parabel und der Geraden dar. Wählen Sie zwei Häuschen für eine Einheit.



c) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Parabel und der Geraden.

$$-2x^2 + 8x - 7 = -x + 2 \rightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4} \rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1.5$$

$y_1 = -x_1 + 2 = -1 \rightarrow S_1(3|-1)$
$y_2 = -x_2 + 2 = 0.5 \rightarrow S_2(1.5|0.5)$

Aufgabe 15 (Potenzen und Wurzeln; AA 203): *2 Punkte*
Vereinfachen Sie so weit wie möglich und stellen Sie das Ergebnis mit positiven Exponenten dar.

$$\left(\left(\frac{x^2 \cdot y^{-3}}{a^{-1} \cdot b^4}\right)^2 : \left(\frac{x^{-2} \cdot y^3}{a^{-2} \cdot b^{-3}}\right)\right) \cdot \left(\frac{b^{10} \cdot y^8}{x^5}\right)$$

$$= \left(\frac{x^4 \cdot y^{-6}}{a^{-2} \cdot b^8} \cdot \frac{a^{-2} \cdot b^{-3}}{x^{-2} \cdot y^3}\right) \cdot \left(\frac{b^{10} \cdot y^8}{x^5}\right) = \frac{x^4 \cdot y^{-6} \cdot a^{-2} \cdot b^{-3} \cdot b^{10} \cdot y^8}{a^{-2} \cdot b^8 \cdot x^{-2} \cdot y^3 \cdot x^5} = xy^{-1}b^{-1} = \frac{x}{by}$$

Aufgabe 16 (Potenzen und Wurzeln; AA 203): *2 Punkte*
Vereinfachen Sie mithilfe der Wurzelgesetze.

a) $\sqrt[n+2]{b^{5n+10}}$

$$= \left(b^{5n+10}\right)^{\frac{1}{n+2}} = b^{\frac{5n+10}{n+2}} = b^5$$

b) $\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b^2}\right)$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b^2} \\
&= \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^2 b^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{b^3} \\
&= a + \sqrt[3]{a^2 b^2} - \sqrt[3]{ab} - b \\
&= a - b + (ab)^{\frac{2}{3}} - (ab)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$